Welle im Messingstab

Ein Messingstab wird im ersten Fall an der Querschnittsfläche und im zweiten Fall der Deckfläche angeschlagen. Die Laufzeit des Wellenpulses zwischen den beiden Messpunkten mit einer konstanten Länge unterscheidet sich dabei in den beiden Fällen.

A) Beschreibung des Experiments

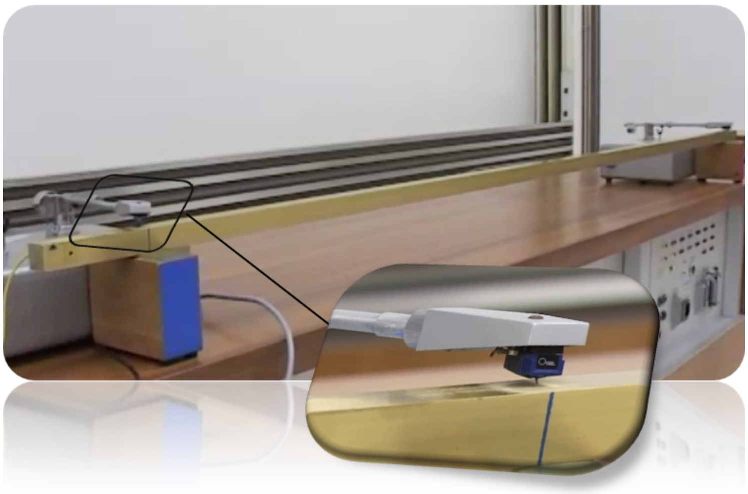

Abbildung 1: Messvorrichtung mit Plattenspielernadeln zur Wellenpulsdetektion

Der Wellenpuls wird durch einen Xylophonschläger verursacht. Dabei bildet sich abhängig von der Art des Anschlagens entweder eine longitudinale beziehungsweise oder eine transversale Welle aus. Abbildung 1 zeigt den Messingstab ($L = 3$ m) und die Messvorrichtung auf. Durch die zwei mit Nadel versehenen Messköpfen lassen sich Wellenpulse in Abhängigkeit von der Zeit detektieren.

B) Physikalische Grundlagen

Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass sich im Messingstab elastische ebene Wellen ausbreiten. Diese sind entweder ausschliesslich longitudinal oder transversal (abhängig davon wie sie erzeugt werden).
Zur Beschreibung einer ebenen elastischen Welle werden zwei aus der Kontinuumsmechanik bekannte Grössen benötigt. Zum einen ist das der Elastizitätsmodul E, welcher in der linearen Näherung den Zusammenhang zwischen der Oberflächenkraft (Kraft, welche senkrecht auf eine Oberfläche wirkt) σ und der Verzerrung ε des elastischen Körpers beschreibt

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

Da ε eine einheitslose Grösse ist, besitzt E die gleiche Einheit wie σ, typischerweise $[E] = [\sigma] = 1GPa$.
Zum anderen wird der Schermodul μ benützt. Er ist eine Materialkonstante, die Auskunft über die lineare elastische Verformung eines elastischen Körpers infolge einer Scherkraft (Kraft, welche parallel zu einer Oberfläche wirkt) gibt. Die Einheit ist ebenfalls $[\mu] = 1GPa$. Mit der Kenntnis vom Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν [1] lässt sich daraus der Schwermodul wie folgt bestimmen.

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \tag{1}$$

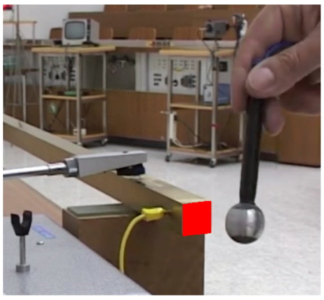

Abbildung 2: Anschlagen erfolgt an der Querschnittsfläche

Wird der Messingstab wie in Abbildung 2 an der Querschnittsfläche angeschlagen, breitet sich eine longitudinale ebene elastische Welle aus. Die Wirkung des Schlage tritt in Form einer Oberflächenkraft auf.

Abbildung 3 zeigt schematisch ein sich im Messingstab ausbreitender longitudinaler Wellenpuls. Bereiche höherer Verdichtung sind mit schwarz gekennzeichnet.
Die longitudinale Ausbreitungsgeschwindigkeit ist gegeben durch

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,, \tag{2}$$

wobei ρ die Massendichte des elastischen Körpers ist.

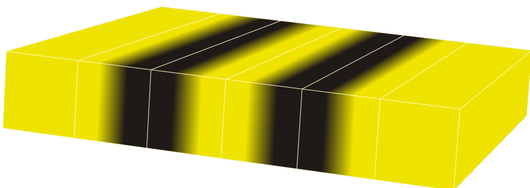

Abbildung 3: Longitudinaler Wellenpuls; die Farbabstufung beschreibt die Dichte der Welle

[1] Definiert als das Verhältnis der relativer Dickenänderung $\Delta d/d$ und der relativen Längenänderung $\Delta l/l$ bei Einwirkung einer äußeren Spannung

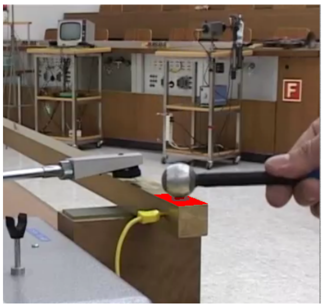

Abbildung 4: Anschlagen erfolgt an der Deckfläche

Wird hingegen der Messingstab an der Deckfläche angeschlagen, (vgl. Abbildung 4) so bildet sich eine transversale ebene elastische Welle aus. Dabei hat der Schlag auf den Stab die Form einer Scherkraft.

Ein sich transversal ausbreitender Wellenpuls ist in Abbildung 5 schematisch aufgezeigt. Die transversale Ausbreitungsgeschwindigkeit ist in diesem Fall ge-

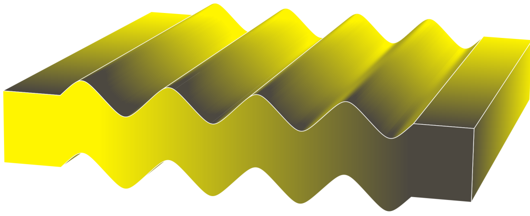

Abbildung 5: Transversaler Wellenpuls

geben durch

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \, . \tag{3}$$

Weil ν im Allgemeinen keine negativen Werte annehmen kann, ist mit Zuhilfenahme von (1) und Vergleich von (2) mit (3) ersichtlich, dass stets $c_l > c_t$ gilt.

Aufgabe

Berrechnen sie durch Hinzuziehen des dazugehörigen Videos die Wellengeschwindigkeit für die longitudinale und die transversale Welle. Der Messingstab ist 3m lang und die Zeit lässt sich aus der Bildschirmanzeige im Video herauslesen. Vergleichen sie die erhaltenen Werte mit den aus der Theorie bestimmten Geschwindigkeiten, wobei $\rho = 8.3 \cdot 10^3 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $E = 98$ GPa und $\nu = 0.37$ als gegeben vorausgesetzt wird.

Lösung

Aus dem Video lassen sich die folgenden Zeiten herauslesen

- $\Delta t_{long} = 573\,\mu\text{s}$
- $\Delta t_{transv} = 105 \cdot 10\,\mu\text{s}$

Daraus ergibt sich mit der Kenntnis der Länge des Stabes die Geschwindigkeiten

- $c_{long} = 3490\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $c_{transv} = 1904\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Als Vorbereitung zur theoretischen Bestimmung wird der Schermodul aus (1) berechnet

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 36\,\text{GPa}$$

Nun ist alles zur Berrechnung benötigte bekannt. Aus (2) und (3) folgt

- $c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3436\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $c_{transv} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 2054\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Fazit: Experiment und Theorie stimmen recht gut überein.